АКАДЕМИЈА ТЕХНИЧКО-ВАСПИТАЧКИХ СТРУКОВНИХ СТУДИЈА

ОДСЕК НИШ

MATEMATIKA 1 $(2+2)$

dr Milica Cvetković

Inverzna matrica i njene primene

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Determinanta matrice

Definicija

Determinanta *kvadratne matrice A, u oznaci* $\det A$ *ili* $|A|$*, je determinanta sastavljena od elemenata matrice A.*

Ako je:

1. $\det A \neq 0$, *matrica A je regularna,*
2. $\det A = 0$, *matrica je singularna.*

Determinanta matrice

Definicija

Determinanta *kvadratne matrice A, u oznaci* $\det A$ *ili* $|A|$*, je determinanta sastavljena od elemenata matrice A.*

Ako je:

1. $\det A \neq 0$*, matrica A je regularna,*
2. $\det A = 0$*, matrica je singularna.*

Determinanta matrice

Definicija

Determinanta *kvadratne matrice A, u oznaci* $\det A$ *ili* $|A|$, *je determinanta sastavljena od elemenata matrice A.*

Ako je:

1. $\det A \neq 0$, *matrica A je regularna*,
2. $\det A = 0$, *matrica je singularna*.

Adjungovana matrica

Definicija

Adjungovana matrica *date kvadratne matrice A, u oznaci* ***adjA****, je transponovana matrica čiji su elementi kofaktori odgovarajućih elemenata matrice A.*

Dakle, za matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gde je A_{ij} algebarski kofaktor elementa a_{ij} matrice A.

Adjungovana matrica

Definicija

Adjungovana matrica *date kvadratne matrice A, u oznaci* ***adjA****, je transponovana matrica čiji su elementi kofaktori odgovarajućih elemenata matrice A.*

Dakle, za matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gde je A_{ij} algebarski kofaktor elementa a_{ij} matrice A.

Adjungovana matrica

Definicija

Adjungovana matrica *date kvadratne matrice A, u oznaci* ***adjA****, je transponovana matrica čiji su elementi kofaktori odgovarajućih elemenata matrice A.*

Dakle, za matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gde je A_{ij} algebarski kofaktor elementa a_{ij} matrice A.

Adjungovana matrica

Definicija

Adjungovana matrica *date kvadratne matrice* A*, u oznaci* $\mathbf{adj}A$*, je transponovana matrica čiji su elementi kofaktori odgovarajućih elemenata matrice* A*.*

Dakle, za matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gde je A_{ij} *algebarski kofaktor elementa* a_{ij} *matrice* A*.*

Adjungovana matrica se analogno može posmatrati i kao matrica odgovarajućih algebarskih kofaktora transponovane matrice:

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{bmatrix},$$

gde je A_{ij}^T algebarski kofaktor elementa transponovane matrice A^T.

Adjungovana matrica se analogno može posmatrati i kao matrica odgovarajućih algebarskih kofaktora transponovane matrice:

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{bmatrix},$$

gde je A_{ij}^T algebarski kofaktor elementa transponovane matrice A^T.

Primer

Naći adjungovanu matricu matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$adjA = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad A^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix},$$

$$adjA=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -3 & -1 & -5\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$adjA = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$adjA=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&3\\-1&0&0\end{bmatrix},\qquad A^T=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\-1&3&0\end{bmatrix},$$

$$adjA=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\3&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\-1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\-1&3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&-1\\3&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-3&-1&-5\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

Inverzna matrica

Definicija

Inverzna *(recipročna) matrica kvadratne matrice A je matrica B za koju važi da je $AB = BA = I$. Inverzna matrica matrice A obično se obeležava sa A^{-1}, pa je:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Iz definicije sledi da je i matrica A inverzna za matricu A^{-1}, odnosno da je inverznost uzajamna:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Inverzna matrica

Definicija

Inverzna *(recipročna) matrica kvadratne matrice* A *je matrica* B *za koju važi da je* $AB = BA = I$. *Inverzna matrica matrice* A *obično se obeležava sa* A^{-1}, *pa je:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Iz definicije sledi da je i matrica A inverzna za matricu A^{-1}, odnosno da je inverznost uzajamna:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Inverzna matrica

Definicija

Inverzna *(recipročna) matrica kvadratne matrice A je matrica B za koju važi da je $AB = BA = I$. Inverzna matrica matrice A obično se obeležava sa A^{-1}, pa je:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Iz definicije sledi da je i matrica A inverzna za matricu A^{-1}, odnosno da je inverznost uzajamna:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Ortogonalna matrica

Definicija

Matrica A je ***ortogonalna*** *ako je njena transponovana matrica jednaka inverznoj, tj. ako je:*

$$A^T = A^{-1}.$$

Ortogonalna matrica

Definicija

Matrica A je ***ortogonalna*** *ako je njena transponovana matrica jednaka inverznoj, tj. ako je:*

$$A^T = A^{-1}.$$

Izračunavanje inverzne matrice

Teorema

Inverzna matrica kvadratne matrice A jednaka je:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA}.$$

Matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je **regularna**, $(\det A \neq 0)$.

Izračunavanje inverzne matrice

Teorema

Inverzna matrica kvadratne matrice A jednaka je:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA}\,.$$

Matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je **regularna**, $(\det A \neq 0)$.

Izračunavanje inverzne matrice

Teorema

Inverzna matrica kvadratne matrice A jednaka je:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA}\,.$$

Matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je **regularna**, $(\det A \neq 0)$.

Izračunavanje inverzne matrice

Teorema

Inverzna matrica kvadratne matrice A jednaka je:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA}\,.$$

Matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je **regularna**, ($\det A \neq 0$).

Primer

Naći inverznu matricu matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Provera:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Provera:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Provera:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Osobine inverznih matrica

Inverzna matrica ima sledeće osobine:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\,,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A\,,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,,$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}\,.$$

Osobine inverznih matrica

Inverzna matrica ima sledeće osobine:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\,,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A\,,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,,$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}\,.$$

Osobine inverznih matrica

Inverzna matrica ima sledeće osobine:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A} \,,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \,,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \,,$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} \,.$$

Osobine inverznih matrica

Inverzna matrica ima sledeće osobine:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A} \, ,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \, ,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \, ,$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} \, .$$

Osobine inverznih matrica

Inverzna matrica ima sledeće osobine:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A} \ ,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \ ,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \ ,$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} \ .$$

Osobine inverznih matrica

Inverzna matrica ima sledeće osobine:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A} \, ,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \, ,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \, ,$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} \, .$$

Sadržaj

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

*nazivaju **matrične jednačine**, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

*nazivaju **matrične jednačine**, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda n × m u prvom, a m × n u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$ (sa leve str.) $\Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}B},$
2. $XA = B / A^{-1}$ (sa desne str.) $\Leftrightarrow \quad XAA^{-1} = BA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = BA^{-1}}.$

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$ (sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$ (sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}B},$
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow \quad XAA^{-1} = BA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = BA^{-1}}.$

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

*nazivaju **matrične jednačine**, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}B},$
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow \quad XAA^{-1} = BA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = BA^{-1}}.$

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B,$
2. $XA = B,$

nazivaju ***matrične jednačine****, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow$ $XAA^{-1} = BA^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{X = BA^{-1}}$.

Matrične jednačine

Definicija

Neka su A i B date matrice a X nepoznata matrica. Tada se jednačine oblika:

1. $AX = B$,
2. $XA = B$,

*nazivaju **matrične jednačine**, gde je A regularna matrica reda n, a B pravougaona matrica reda $n \times m$ u prvom, a $m \times n$ u drugom slučaju.*

Rešavanje:

1. $AX = B / A^{-1}$(sa leve str.) $\Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}B}$,
2. $XA = B / A^{-1}$(sa desne str.) $\Leftrightarrow \quad XAA^{-1} = BA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X = BA^{-1}}$.

Primer

Rešiti matričnu jednačinu:

$$A + BX = C - X,$$

ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Primer

Rešiti matričnu jednačinu:

$$A + BX = C - X,$$

ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Primer

Rešiti matričnu jednačinu:

$$A + BX = C - X,$$

ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Primer

Rešiti matričnu jednačinu:

$$A + BX = C - X,$$

ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Primer

Rešiti matričnu jednačinu:

$$A + BX = C - X,$$

ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} (\text{s leve}) \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1}(\text{s leve}) \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} \text{(s leve)} \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} (\text{s leve}) \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} (\text{s leve}) \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} \text{(s leve)} \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} \text{(s leve)} \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} \text{(s leve)} \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$A + BX = C - X \quad \Leftrightarrow \quad BX + X = C - A \quad \Leftrightarrow \quad (B + I)X = C - A.$$

Ako označimo:

$$B + I = D, \qquad C - A = E,$$

$$DX = E / D^{-1} (\text{s leve}) \quad \Leftrightarrow \quad D^{-1}DX = D^{-1}E \quad \Leftrightarrow \quad X = D^{-1}E.$$

Rešenje:

$$X = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 52 & 26 \\ -26 & -78 \\ 26 & -78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$X = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 52 & 26 \\ -26 & -78 \\ 26 & -78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$